Die Vorhaltskettenformel

1 Die vier Vorhaltselemente

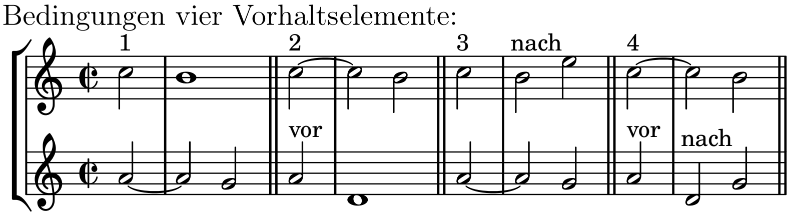
Gut schreiben lassen sich Vorhaltsketten mit einer Art Baukastensystem. Dabei wird die Vorhaltskette als Verknüpfung von Vorhaltselementen aufgefasst. Dazu werden drei einschränkende Bedingungen aufgestellt:

1. Die einzelnen Vorhaltselemente sollen beliebig miteinander verbunden werden können.

2. Der entstehende zweistimmige Gerüstsatz soll im doppelten Kontrapunkt der Oktave stehen.

3. Auch bei Stimmvertauschung soll auf den betonten Zeiten eine Dissonanz stehen.

Damit alle Vorhaltselemente miteinander verknüpft werden können, müssen sie alle mit einer unvollkommenen Konsonanz beginnen, also mit einer Terz oder einer Sexte. Damit auch beim Stimmtausch auf den betonten Zeiten eine Dissonanz steht, kommen nur der Septim- und der Sekundvorhalt in Frage. Von Oktavlagen abgesehen gibt es unter diesen Bedingungen vier Vorhaltselemente:



Im Notenbeispiel ist es gekennzeichnet, wenn die Agensstimme vor oder nach der Dissonanz springt. Da diese vier Bausteine alle beliebig miteinander verknüpft werden können, wächst die Zahl der Möglichkeiten exponentiell zu der Länge der Vorhaltskette. Dennoch lässt sich wenigstens teilweise ein Überblick behalten, und zwar mit einem mathematischen Ansatz. Dazu wird die so genannte Restklassenarithmetik benötigt.

2 Die mathematische Modellierung

In der Schule lernen wir die Division mit Rest so, wie es hier auf der linken Seite steht:

$$\begin{array}{rcrcrlr|rcl} 10 & : & 7 & = & 1 & \text{R.} & 3 & 10 & \equiv & 3 \bmod 7 \\ 9 & : & 7 & = & 1 & \text{R.} & 2 & 9 & \equiv & 2 \bmod 7 \end{array}$$

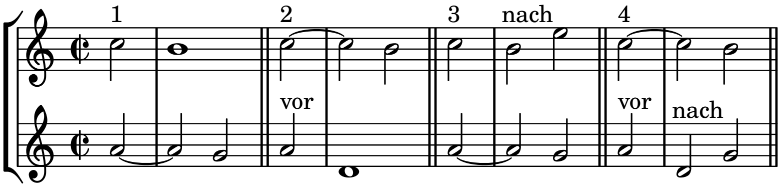
Auf der rechten Seite steht die mathematische Schreibweise. $a \equiv b \bmod c$ – „mod“ sprich „módulo“ – bedeutet dabei: a und b haben denselben Rest bei der Division durch c, oder anders ausgedrückt: a und b gehören zu derselben Restklasse „modulo“ c. Mit solchen Restklassen kann man rechnen. Addition, Subtraktion und Multiplikation funktionieren ganz einfach. Die Division ist schwieriger, wird aber im Folgenden nicht benötigt. Deutlich wird es – hoffentlich – durch die folgenden Beispiele:

$$\begin{array}{r|r|l} 10+9=19 & 19:7=\ \ 2\,\text{R.}\,5 & 3+2\equiv 5 \bmod 7 \\ 10-9=\ \ 1 & 1:7=\ \ 0\,\text{R.}\,1 & 3-2\equiv 1 \bmod 7 \\ 10\times 9=90 & 90:7=12\,\text{R.}\,6 & 3\times 2\equiv 6 \bmod 7 \end{array}$$

Diese Restklassenarithmetik wird auf die Vorhaltsketten angewendet. Dabei wird von Oktaven und von Vorzeichen abstrahiert. f^1 und f^2 bekommen denselben Wert, und *f* und *fis* bekommen auch denselben Wert. Die Intervalle werden in Sekundschritten gemessen, Es gibt keinen Unterschied zwischen großen, kleinen, reinen, übermäßigen und verminderten Intervallen. Als Basiston wird c gewählt Hier wäre auch jeder andere Ton genauso möglich. So ergibt sich diese Zuordnung:

Restklassen modulo 7	Töne	Intervalle			
		aufwärts		abwärts	
0	c	Prim	Oktave	Prim	Oktave
1	d	Sekunde	None	Septime	...
2	e	Terz	Dezime	Sexte	...
3	f	Quarte	Undezime	Quinte	Duodezime
4	g	Quinte	Duodezime	Quarte	Undezime
5	a	Sexte	...	Terz	Dezime
6	h	Septime	...	Sekunde	None

Für das Ausgangs- und das Endintervall der Vorhaltselemente werden „Grundtöne“ definiert, und zwar sei der Grundton der Terz der untere und der Grundton der Sext der obere Ton. Mit dieser Definition werden die Grundtonfortschreitungen der Vorhaltselemente bestimmt. Für die vier Vorhaltselemente ergeben sich die Werte in der Tabelle darunter:



Element Nr.	Sprünge neben der Dissonanz		Grundton Anfang p	Grundton Ende q	Differenz der Grundtöne $q-p$
1			5	4	6
2	vor		5	6	1
3		nach	5	2	4
4	vor	nach	5	4	6

Zwischen den Sprüngen vor und nach der Dissonanz einerseits und der Differenz der Grundtöne andererseits besteht eine Beziehung, und zwar wenn man diese Werte zuordnet:

Sprung vor der Dissonanz	2
Sprung nach der Dissonanz	5
Synkope	6

Die Summe der jeweiligen Werte entspricht dann der Differenz der Grundtöne, wobei jeweils die Werte für diejenigen Sprünge berücksichtigt werden, die in dem betreffenden Vorhaltselement vorkommen.

3 Die Kette

Dieser Zusammenhang wird auf den Fall mehrerer verknüpfter Vorhaltselemente übertragen. Dazu werden diese Bezeichnungen eingeführt:

Anzahl der Sprünge vor der Dissonanz	v
Anzahl der Sprünge nach der Dissonanz	n
Anzahl der Synkopen	s
Anfangsgrundton des k-ten Elements	p_k
Endgrundton des k-ten Elements	q_k
Intervall zwischen Anfangs- und Endgrundton der Kette	i

Weil der Endgrundton eines Elements der Anfangsgrundton des folgenden ist, gilt $p_{k+1} = q_k$. Das Intervall zwischen Anfangs- und Endgrundton der Kette, i, ist die Summe der Grundtonfortschreitungen der einzelnen Elemente. Hier ergibt sich

$$i = \sum_{k=1}^{s} q_k - p_k = q_s - p_1$$

Analog lassen sich die Werte für die Sprünge vor und nach der Dissonanz und für die Vorhalte aus der Tabelle oben addieren. Dann ergibt sich diese Kongruenz:

$$v \cdot 2 + n \cdot 5 + s \cdot 6 \equiv i \bmod 7$$

Da modulo 7 gerechnet wird, können bei Umformungen beliebig Vielfache von 7 addiert und subtrahiert werden. Unter dieser Voraussetzung folgt:

$$v \cdot 2 + n \cdot (5 - 7) + s \cdot (6 - 7) \equiv i \bmod 7$$

$$v \cdot 2 + n \cdot (-2) - s \equiv i \bmod 7$$

$$2v - 2n \equiv i + s \bmod 7$$

$$2 \cdot (v - n) \equiv i + s \bmod 7$$

$$4 \cdot 2 \cdot (v - n) \equiv 4 \cdot (i + s) \bmod 7$$

$$8 \cdot (v - n) \equiv 4 \cdot (i + s) \bmod 7$$

$$(8 - 7) \cdot (v - n) \equiv 4 \cdot (i + s) \bmod 7$$

Das führt zur Vorhaltskettenformel:

$$v - n \equiv 4 \cdot (i + s) \bmod 7$$

Wenn also das Gesamtintervall, i, und die Anzahl der Synkopen, s, gegeben sind, lassen sich Bedingungen für die Anzahl der Sprünge vor und nach den Dissonanzen berechnen. Allerdings kann die Anzahl der Sprünge vor den Dissonanzen nicht größer sein als die Anzahl der Dissonanzen, und für die Sprünge nach den Dissonanzen gilt dasselbe, formal also:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & v & \leq & s \\ 0 & \leq & n & \leq & s \end{array}$$

4 Ein Beispiel zur Anwendung

Als Beispiel für die Anwendung der Synkopenkongruenz soll eine Vorhaltskette konstruiert werden, die in drei Synkopen von c nach a führt. Es gilt also $i \equiv 5 \bmod 7$ – Sexte aufwärts – und $s = 3$ – drei Synkopen –. Einsetzen ergibt

$$v - n \equiv 4 \cdot (5 + 3) \bmod 7$$

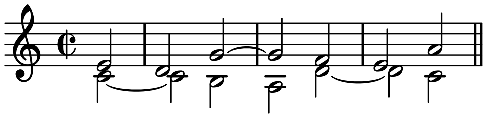
Daraus folgt

$$v - n \equiv 4 \cdot 8 \bmod 7$$

und

$$v - n \equiv 4 \bmod 7$$

Für $(v - n)$ kommen also z. B. die Werte 4 und -3 in Frage. Da vier Sprünge vor den Synkopen bei nur drei Synkopen gar nicht möglich sind, ist die einzige Lösung $v - n = -3$. Wegen des negativen Vorzeichens enthält die Verbindung also drei Sprünge *nach* der Dissonanz:



Ich vermute, dass solche Vorhaltsketten – besonders mit hinzugefügtem Bass – bei Corelli sehr gebräuchlich sind. Bei der Auflösung der Vorhalte kann man offenbar häufig statt der erwarteten kleinen Sekunde die große nehmen und umgekehrt, ohne dass es falsch klingen würde. So lassen sich Kadenzen auf den üblichen Stufen leicht ansteuern. Es kann allerdings nur durch eine eigene Untersuchung geklärt werden, inwieweit diese Vermutung stimmt, d. h. inwieweit die resultierenden Gerüste und Sätze tatsächlich dem Stil Corellis entsprechen,

5 Die Erweiterung zur Dreistimmigkeit

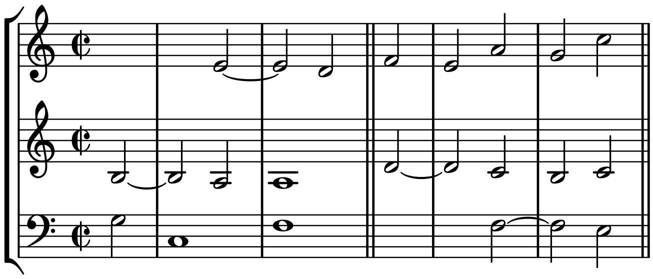
Das Verfahren, bestimmte Punkte mit einer Vorhaltskette im doppelten Kontrapunkt zu verknüpfen, kann auf den dreistimmigen Satz übertragen werden. Dadurch werden weitere Verbindungen möglich. So gibt es z. B. zwei Grundtonintervalle, die sich in der Zweistimmigkeit nicht mit zwei Vorhalten verbinden lassen, nämlich eine Sekunde abwärts und eine Quarte abwärts. Es gelten also $s = 2$ und $i \in \{4, 6\}$. Einsetzen ergibt

$$v - n \equiv 4 \cdot (2 + 4) \bmod 7 \text{ bzw. } v - n \equiv 4 \cdot (2 + 6) \bmod 7$$

Ausrechnen ergibt

$$v - n \equiv 3 \bmod 7 \text{ bzw. } v - n \equiv 4 \bmod 7$$

In beiden Fällen wären mindestens drei Sprünge nötig. Es gibt aber nur zwei Synkopen. Deshalb existieren solche Verbindungen in der Zweistimmigkeit nicht. Aber mit drei Stimmen sind sie möglich:



Für diese zusätzlichen Möglichkeiten, die in der Zweistimmigkeit nicht existieren, muss die dritte Stimme eine Quinte über oder eine Terz unter dem Grundton des Auflösungsintervalls zur Patiensstimme des nächsten Vorhalts werden. Selbstverständlich kann eine dritte Stimme auch Agensstimme sein oder auch mit dem Grundton oder der Terz des Auflösungsintervalls identisch sein. Nur ergeben sich dadurch nicht mehr Möglichkeiten als in der Zweistimmigkeit.
Rechnerisch lässt sich das so erfassen: Mit den Bezeichnungen a für die Anzahl der Fälle, in denen die dritte Stimme die Quinte *über* dem Grundton des Auflösungsintervalls ist, und b für die Anzahl der Fälle, in denen die dritte Stimme die Terz *unter* dem Grundton des Auflösungsintervalls ist, ergibt sich

$$v - n + a - b \equiv 4 \cdot (i + s) \bmod 7$$

6 Ein Beispiel zur Dreistimmigkeit

Gesucht ist eine Modulation von fis-Moll nach h-Moll mit zwei Vorhaltsdissonanzen, die mit der Terz *fis–a* beginnt und bei der sich die zweite Vorhaltsdissonanz in die Terz *ais–cis* auflöst. Weil der Grundton des letzten Auflösungsintervalls zwei Sekunden über dem Startintervall liegt, gilt $i = 2$. Da eine Verbindung mit zwei Vorhaltsdissonanzen gesucht wird, gilt auch $s = 2$. Einsetzen ergibt

$$v - n + a - b \equiv 4 \cdot (2 + 2) \bmod 7$$

und

$$v - n + a - b \equiv 16 \bmod 7$$

und

$$v - n + a - b \equiv 2 \bmod 7$$

Nehmen wir an $n = b = 0$. Dann bleibt

$$v + a \equiv 2 \bmod 7$$

Man kann also zweimal einen Sprung von der Dissonanz machen, $v = 2, s = 0$, oder einen Sprung vor der Dissonanz und einmal die Synkopenkette von der Quinte über dem

Auflösungsintervalls fortsetzen, $v = s = 1$. Hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten: Der Sprung vor der Dissonanz kann vor der ersten oder der zweiten erfolgen. Dazu ergeben sich diese Sätze: